

1 GONIOMETRICKÉ FUNKCIE

1.6 TRANSFORMÁCIE GRAFOV FUNKCIÍ SÍNUS, KOSÍNUS

S funkciami sínus, kosínus a ich grafmi sa žiaci stretávajú aj na iných predmetoch ako je matematika. Na fyzike napr. s rovnicou pre okamžitú výchylku hmotného bodu pri kmitavom pohybe $y = y_m \sin(\omega t + \varphi_0)$, na elektrotechnike s rovnicou pre okamžitú hodnotu striedavého prúdu $i = I_m \sin(\omega t + \varphi_0)$ a striedavého napätia $u = U_m \sin(\omega t + \varphi_0)$. Preto je potrebné, aby žiaci poznali nielen grafy základných funkcií, ale aj grafy funkcií $y = a \cdot \sin(bx + c) + d$, $y = a \cdot \cos(bx + c) + d$ a rozumeli významu koeficientov a , b , c , d .

Význam jednotlivých koeficientov preskúmame osobitne.

1. Koeficient a :

Príklad 1: Zobrazte do tej istej súradnicovej sústavy grafy nasledujúcich funkcií:

a) $y = \sin x$

b) $y = 3 \sin x$

c) $y = \frac{1}{4} \sin x$

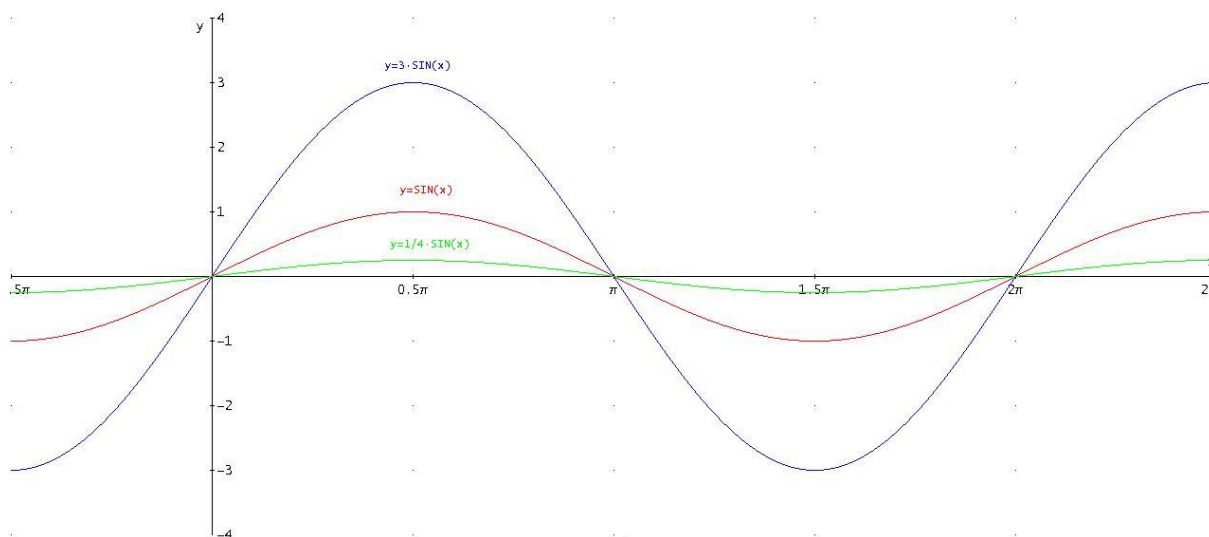
Riešenie: Vlastnosti koeficientu a preskúmame pomocou tabuľky Tab. č. 1

	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{2}$	π
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	1	0
$3 \sin x$	0	$\frac{3}{2}$	3	0
$\frac{1}{4} \sin x$	0	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	0

Tab. č. 1 Skúmanie vlastností koeficientu a

Z tabuľky je zrejmé, že oproti základnej funkcii $y = \sin x$ má každá hodnota funkcie $y = 3 \sin x$ trojnásobné hodnoty, hodnoty funkcie $y = \frac{1}{4} \sin x$ sú 4 krát menšie.

Body, v ktorých má základná funkcia hodnotu 0 zostávajú na mieste. Grafy všetkých troch funkcií sú zostrojené na Obr. č. 1.



Obr. č. 1 Grafy funkcií $y = \sin x$, $y = 3 \sin x$, $y = \frac{1}{4} \sin x$

Z Obr. č. 1 je zrejmé, že graf sa „roztáhuje“, „sťahuje“ vo zvislom smere, pričom body na osi x zostávajú na mieste. Tento fakt charakterizujeme pojmom amplitúda – maximálna výchylka.

Funkcia $y = \sin x$ má amplitúdu rovnú 1, $y = 3 \sin x$ má amplitúdu 3, $y = \frac{1}{4} \sin x$ má amplitúdu $\frac{1}{4}$.

2. Koeficient b :

Príklad 2: Zobrazte do tej istej súradnicovej sústavy grafy nasledujúcich funkcií:

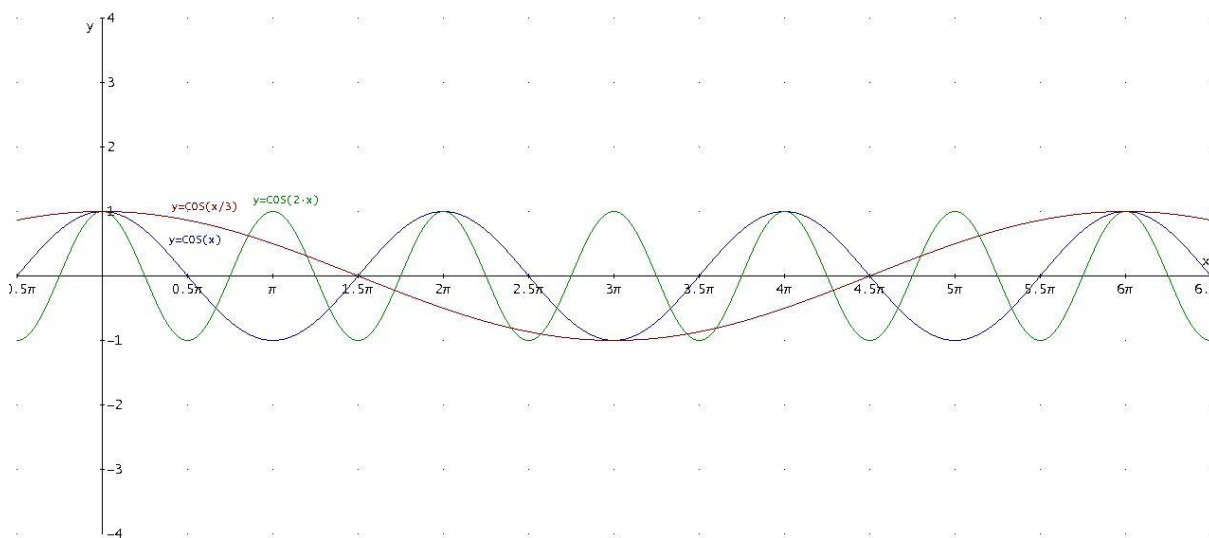
- $y = \cos x$
- $y = \cos 2x$
- $y = \cos \frac{x}{3}$

Riešenie: Vlastnosti koeficientu b preskúmame podobne ako v predchádzajúcom príklade pomocou tabuľky Tab. č. 2

	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	π	2π	3π	6π
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	-1	1	-1	1
$\cos 2x$	1	0	-1	1	1	1	1
$\cos \frac{x}{3}$	1	$\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	-1	1

Tab. č. 2 Skúmanie vlastností koeficientu b

V čísle 6π majú všetky tieto funkcie tú istú hodnotu ako v čísle 0, pretože 6π je pre všetky tieto funkcie perióda. Najmenšiu periódu ale tieto funkcie rovnakú nemajú. Základná funkcia $y = \cos x$ má najmenšiu periódu 2π a v čísle 2π má hodnotu 1, funkcia $y = \cos 2x$ dosiahne tú istú hodnotu už skôr a to vtedy, ak za x dosadíme π , lebo $\cos(2 \cdot \pi) = \cos 2\pi = 1$. Funkcia $y = \cos \frac{x}{3}$ dosiahne túto hodnotu až vtedy, keď za x dosadíme 6π , lebo $\cos \frac{6\pi}{3} = \cos 2\pi = 1$. Grafy všetkých troch funkcií sú zostrojené na Obr. č. 2



Obr. č. 2 Grafy funkcií $y = \cos x$, $y = \cos 2x$, $y = \cos(x/3)$

Graf funkcie sa v závislosti na koeficiente b „zhustňuje“ alebo „rozťahuje“ vo vodorovnom smere, pričom bod na osi y zostáva na mieste. Túto skutočnosť charakterizujeme, ako už bolo uvedené vyššie, pomocou najmenšej periódy. Funkcia $y = \cos x$ má najmenšiu periódu 2π , funkcia $y = \cos 2x$ oproti nej 2 krát menšiu, teda π , funkcia $y = \cos \frac{x}{3}$ ju má 3 krát väčšiu, teda 6π . S periódou úzko súvisí fyzikálna veličina frekvencia, pre ktorú platí $f = \frac{1}{T}$, kde T je perióda. Ak má funkcia 2 krát menšiu periódu, má dvakrát väčšiu frekvenciu, jej graf je 2 krát „hustejší“.

3. Koeficient c :

Príklad 3: Zobrazte do tej istej súradnicovej sústavy grafy nasledujúcich funkcií:

a) $y = \cos x$

b) $y = \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$

c) $y = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$

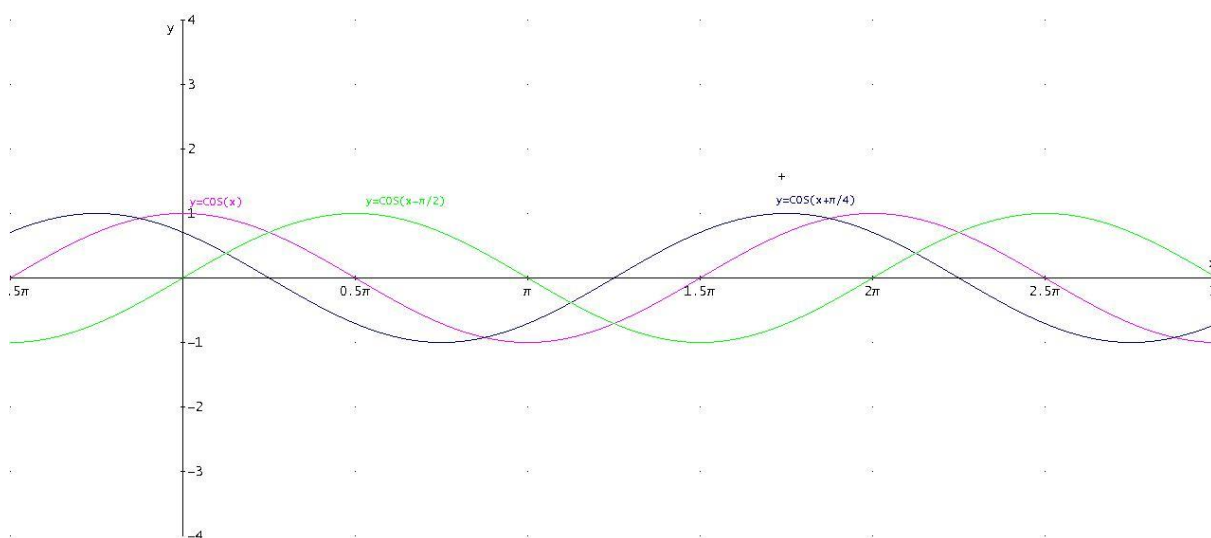
Riešenie: Vytvoríme tabuľku Tab. č. 3.

	$-\frac{\pi}{4}$	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3}{4}\pi$	π
$\cos x$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1
$\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$	1	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$
$\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0

Tab. č. 3 Skúmanie vlastností koeficientu c

Z tabuľky je zrejmé že funkcia $y = \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ má v čísle 0 rovnakú hodnotu ako funkcia $y = \cos x$ v čísle $\frac{\pi}{4}$, v číslach $\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{2}$, $\frac{3}{4}\pi$ nadobúda postupne tie isté hodnoty ako základná funkcia v číslach $\frac{\pi}{2}$, $\frac{3}{4}\pi$, π . Podobný posun by sme mohli

nájst' aj medzi funkciami $y = \cos x$ a $y = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$. Grafy všetkých troch funkcií sú zostrojené na Obr. č. 3



Obr. č. 3 Grafy funkcií $y = \cos x$, $y = \cos(x + \pi/4)$, $y = \cos(x - \pi/2)$

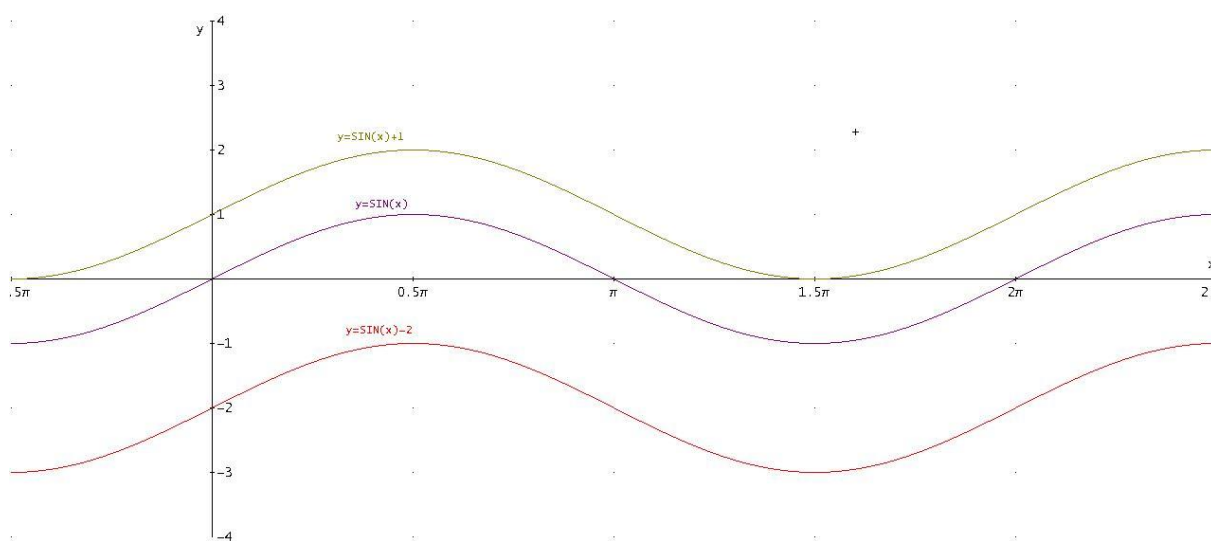
Koeficient c vyjadruje posun na osi x . Ak zoberieme za základ funkciu $y = \cos x$ v intervale $\langle 0, 2\pi \rangle$, funkcia $y = \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ je oproti nej posunutá o $\frac{\pi}{4}$ doľava, čiže ten istý priebeh má v intervale $\left\langle -\frac{\pi}{4}, \frac{3}{4}\pi \right\rangle$. Podobne funkcia $y = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$ je oproti základnej funkcii posunutá o $\frac{\pi}{2}$ doprava a základný priebeh má v intervale $\left\langle \frac{\pi}{2}, \frac{5}{2}\pi \right\rangle$.

4. Koeficient d :

Príklad 4: Zobrazte do tej istej súradnicovej sústavy grafy nasledujúcich funkcií:

- $y = \sin x$
- $y = \sin x + 1$
- $y = \sin x - 2$

Riešenie: Po skúsenostiach z predchádzajúcich príkladov by už malo byť aj bez tabuľky zrejmé, že v prípade b) sa k hodnotám funkcie $y = \sin x$ stále pripočítava číslo 1 a graf sa posúva o 1 smerom hore, v prípade c) sa odpočítava číslo 2 a graf sa posúva o 2 smerom dole. Grafy všetkých troch funkcií sú zostrojené na Obr. č. 4



Obr. č. 4 Grafy funkcií $y = \sin x$, $y = \sin x + 1$, $y = \sin x - 2$

Kontrolné otázky:

1. Vysvetlite vplyv koeficientu a na grafy funkcií:
 $y = a \cdot \sin(bx + c) + d$, $y = a \cdot \cos(bx + c) + d$.
2. Vysvetlite vplyv koeficientu b na grafy funkcií:
 $y = a \cdot \sin(bx + c) + d$, $y = a \cdot \cos(bx + c) + d$.
3. Vysvetlite vplyv koeficientu c na grafy funkcií:
 $y = a \cdot \sin(bx + c) + d$, $y = a \cdot \cos(bx + c) + d$.
4. Vysvetlite vplyv koeficientu d na grafy funkcií:
 $y = a \cdot \sin(bx + c) + d$, $y = a \cdot \cos(bx + c) + d$.
5. Určte akú periódu a amplitúdu má funkcia $y = 5 \cdot \cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) - 3$. $[\pi, 5]$